Chapitre 15

Dérivation

Plan du chapitre

Hypothèse

- I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux.
- D et D' sont des parties de $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme une réunion d'un ou plusieurs intervalles non triviaux, par exemple $D = \mathbb{R}^*$, $D = D_{\tan}$ ou encore $D = \big[-3,-2\big] \cup \mathbb{R}_+$.

De plus, a est un point de D (donc forcément fini).

1 Compléments sur la dérivabilité

1.1 Dérivable donc continue (mais pas l'inverse !)

Théorème 15.1

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

La réciproque est fausse ! Penser aux fonctions typiquement non dérivables, comme $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \arccos x$ ... qui sont pourtant continues.

Démonstration. Soit f dérivable en a, de sorte que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{tend vers une limite finie qu'on note } \ell$$

(on a en fait $\ell = f'(a)$). Supposons par l'absurde que f n'est pas continue en a. Alors $f(x)$ ne tend pas vers $f(a)$ lorsque x tend vers a. En prenant la négation de la définition de la limite, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in D \qquad |x-a| \leq \delta \quad \text{et} \quad |f(x)-f(a)| > \varepsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$, il existe un réel x_n dans D qui vérifie $|x_n - a| \leq \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n)-f(a)| > \varepsilon$. On construit ainsi une suite (x_n) qui tend vers a. Par composition de limite, on a

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ \dfrac{f(X)-f(a)}{X-a} \xrightarrow[X\to a]{} \ell \end{cases} \implies \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies \left|\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$$

Or, comme $|f(x_n)-f(a)| > \varepsilon$ et $|x_n - a| \to 0^+$, on peut montrer qu'en fait $\left|\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\right| \to +\infty$, ce qui est absurde car $|\ell|$ est fini et par unicité de la limite. □

1.2 Calcul de limite par le taux d'accroissement

Si f est dérivable en a, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$. Cela peut permettre de calculer certains types de limites.

Exemple 1. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Il est conseillé de toujours poser la (bonne) fonction f pour appliquer cette technique et de calculer $f'(x)$ consciencieusement. Sinon vous risquez de vous tromper !

Exemple 2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x}-\sqrt{3}}{x-1}$.

1.3 Fonction dérivée

Définition 15.2

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable si elle est dérivable en tout point de D. On note alors

$$\begin{aligned} f' : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

On dit que f' est l'application dérivée de f ou simplement la dérivée de f.

On note parfois $\mathscr{D}^1(D,\mathbb{R})$, ou juste $\mathscr{D}^1(D)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur D.

Exemple 3.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable (sur $\mathbb{R}^*$) car elle l'est en tout point a de $\mathbb{R}^*$.
- la fonction tan est dérivable (sur $D_{\tan}$) car elle l'est en tout point de $D_{\tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[$.

⚠ La notation $'$ est réservée aux *fonctions* :

$$\text{Oui :} \qquad f'(x) \qquad \sin'(x) \qquad (u^2)' = 2uu'$$

$$\textbf{Non !} : \qquad f(x)' \qquad \left(\sqrt{x}\right)' \qquad (\ln\cos(x))' = -\frac{1}{\cos x}\cos(x)'$$

⚠ Pour toute partie $X \subset D$, l'assertion "f est dérivable sur X" ne signifie pas la même chose que "$f\big|_X$ est dérivable", cf exemple suivant.

Exemple 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

- Il est clair que f n'est pas dérivable en 0. En particulier, elle n'est dérivable ni sur $\mathbb{R}_-$, ni sur $\mathbb{R}_+$.
- Cependant, la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est dérivable (sur $\mathbb{R}_+$), car $f|_{\mathbb{R}_+}$ coïncide avec la fonction $x \mapsto x$ restreinte à $\mathbb{R}_+$. Idem pour $f\big|_{\mathbb{R}_-}$.

Théorème 15.3

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable (sur D), alors f est continue (sur D).

1.4 Dérivées à droite et à gauche

Définition 15.4

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est dérivable à droite en a si la limite suivante existe et est finie :

$$f'_d(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

  La valeur $f'_d(a)$ est appelée la dérivée de f à droite en a.

- On dit que f est dérivable à gauche en a si la limite suivante existe et est finie :

$$f'_g(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

  La valeur $f'_g(a)$ est appelée la dérivée de f à gauche en a.

Exemple 5. Montrer que la fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 et calculer $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$.

Remarque. f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a ssi $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente à gauche (resp. à droite) en a. Dans ce cas, la pente de cette demi-tangente est égale à $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).

Remarque. Les remarques suivantes parlent généralement de dérivée à gauche, mais s'adaptent également pour les dérivée à droite.

- Pour étudier la dérivabilité à gauche, on étudie donc une limite à gauche du taux d'accroissement. Cependant :
  - Dans certains cas, la limite à gauche du taux n'a pas de sens. Par exemple, si f est définie sur $\mathbb{R}_+$, la notion de dérivée à gauche de f en 0 n'a pas de sens.
  - Dans d'autres cas, la limite à gauche du taux coïncide avec la limite usuelle. Par exemple, si f est définie sur $\mathbb{R}_-$, alors f est dérivable à gauche en 0 si et seulement si f est dérivable en 0 et si c'est le cas, $f'_g(0) = f'(0)$.
- Si f est dérivable à gauche en a, alors f est continue à gauche en a. En effet,

Théorème 15.5

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a & \text{(si cela a un sens)} \\ f \text{ est dérivable à droite en } a & \text{(si cela a un sens)} \\ f'_g(a) = f'_d(a) & \text{(si ces deux valeurs ont un sens)} \end{cases}$$

De plus, lorsque c'est le cas, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple 6. La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, mais $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$. Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, f n'est pas dérivable en 0.

2 Extremum

Définition 15.6 – Rappel : extremum (global)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que ...

- f admet un maximum (global) en a si $\quad \forall x \in D \qquad f(x) \leq f(a)$
- f admet un minimum (global) en a si $\quad \forall x \in D \qquad f(x) \geq f(a)$
- f admet un extremum (global) en a si f admet en a un maximum (global) ou un minimum (global).

La valeur maximale de f peut être atteinte en plusieurs points $a_1, a_2, \cdots$. On distinguera bien LE maximum de f, i.e. la valeur $\max f = f(a_1) = f(a_2) = \ldots$ et LES points $a_1, a_2, \cdots$ EN lesquels le maximum est atteint.

Définition 15.7 – Extremum local

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que ...

- f admet un maximum local en a si $f \leq f(a)$ au voisinage de a :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \cap \left[a - \eta, a + \eta\right] \qquad f(x) \leq f(a)$$

- f admet un minimum local en a si $f \geq f(a)$ au voisinage de a :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \cap \left[a - \eta, a + \eta\right] \qquad f(x) \geq f(a)$$

- f admet un extremum local en a si f admet en a un maximum local ou un minimum local.

Remarque. Un extremum global est un extremum local. La réciproque est fausse : la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ admet un maximum local en 0 mais ce n'est pas un maximum global.

Si f admet un maximum local (resp. global) en a, alors $-f$ admet un minimum local (resp. global) en a.

Définition 15.8

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que a est un point critique de f si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Remarque. Dit autrement, **un point critique est un point où f possède une tangente horizontale**.

Définition 15.9

Soit $a \in I$. On dit que a est un point intérieur de I si a est un point de I qui n'est pas une extrémité de I.
On note $\mathring{I}$ l'ensemble des points intérieurs de I.

Si $I = \left[0,1\right]$, alors les points intérieurs de I sont tous les points de $\left]0,1\right[$. On a donc $\mathring{I} = \left]0,1\right[$.

Théorème 15.10

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} a \in \mathring{I} \\ f \text{ admet un extremum local en } a \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad a \text{ est un point critique de } f, \text{ i.e. } f'(a) = 0$$

Remarque. La réciproque du Théorème 15.10 est *fausse* : un point critique n'est pas nécessairement un extremum local. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ admet 0 pour point critique, mais ce n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

Remarque. Le résultat du Théorème 15.10 tombe en défaut si a est une extrémité de I (donc $a \notin \mathring{I}$). Par exemple la fonction identité sur $\left[0,1\right]$ admet un minimum en 0 et un maximum en 1 alors que ce ne sont pas des points critiques.

Démonstration. On démontre ce résultat lorsque f admet en a un maximum local. Par définition, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap \left[a-\eta, a+\eta\right]$, on a $f(x) \leq f(a)$, donc

$$f(x) - f(a) \leq 0$$

- Si $x > a$, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. Or, f est dérivable en a, donc dérivable à droite en a. Par passage à la limite quand x tend vers a^+, on, a :

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

si bien que $f'(a) = f'_d(a) \leq 0$.

- Si $x < a$, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Or, f est dérivable en a, donc dérivable à gauche en a. Par passage à la limite quand x tend vers a^-, on, a :
$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$
si bien que $f'(a) = f'_g(a) \geq 0$.

Finalement, $0 \leq f'(a) \leq 0$ donc $f'(a) = 0$. □

Méthode

Pour trouver un extremum global, on peut recourir à un tableau de variations.
Pour un extremum local, cela marche aussi, mais on verra d'autres outils plus précis plus tard.

3 Les grands théorème sur la dérivation

3.1 Théorème de Rolle

Théorème 15.11 – Théorème de Rolle

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

1.
2.
3.

Démonstration.

$\square$

3.2 Le théorème des accroissements finis

Théorème 15.12 – Théorème des Accroissements Finis (TAF)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

1.

2.

Démonstration. On pose

$$\begin{aligned} g : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{aligned}$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ comme somme et produit de telles fonctions. De plus,

$\square$

Exemple 7. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

3.3 Dérivation et monotonie

On rappelle que I est un $\boxed{\text{intervalle}}$.

Théorème 15.13

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I. Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur $\mathring{I}$.
- f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur $\mathring{I}$.

Ce théorème tombe en défaut si on ne l'applique pas sur un intervalle. Contre-exemple : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée négative en tout point de $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration. On ne démontre que la première équivalence. On procède par double implication.

- Supposons $f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$ et montrons que f est croissante.

- Supposons f croissante. Soit a un point intérieur de I : montrons que $f'(a) \geq 0$. Soit $x \in I$ tel que $x > a$ (un tel x existe car $a \in \mathring{I}$). Comme f est croissante,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et en passant à la limite quand x tend vers a^+, comme f est dérivable en a, on obtient $f'(a) \geq 0$.

□

Théorème 15.14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est strictement croissante sur I.
- $f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$ (i.e. f est croissante), et pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a $f'\big|_{]a,b[} \not\equiv 0$.

La deuxième condition peut également se réécrire : f' est positive sur $\mathring{I}$ et sur tout intervalle non trivial J, f' n'est pas identiquement nulle sur J. En particulier, si $f' \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

Exemple 8. La fonction $x \mapsto x - \sin x$ admet pour dérivée la fonction $x \mapsto 1 - \cos x$, qui est positive et ne s'annule que sur $2\pi\mathbb{Z}$, donc ne s'annule identiquement sur aucun intervalle non trivial. Ainsi, la fonction $x \mapsto x - \sin x$ est strictement croissante (sur $\mathbb{R}$).

3.4 Fonction lipschitzienne

Définition 15.15 – Fonction lipschitzienne

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $K \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est K-lipschitzienne si

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|$$

Une fonction f est dite lipschitzienne s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f est K-lipschitzienne.

Exemple 9.

- La fonction $x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne (mais aussi 2-lipschitzienne, π-lipschitzienne...) car :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \big| |x| - |y| \big| \leq 1 \times |x - y|$$

- La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne, mais sa restriction à $\big[-1, 1\big]$ est 2-lipschitzienne car

$$\forall x, y \in \big[-1, 1\big] \qquad \begin{aligned} \left|x^2 - y^2\right| &= |(x+y)(x-y)| \\ &\leq |x+y| \times |x-y| \\ &\leq (|x| + |y|) \times |x-y| \\ &\leq 2\,|x-y| \end{aligned}$$

Exemple 10. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne.

Théorème 15.16

Toute fonction lipschitzienne est continue.

Démonstration. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne et $a \in I$. Montrons que f est continue en a. On a :

$$|f(x) - f(a)| \leq K|x-a| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Ainsi f est continue en a. Par arbitraire sur a, f est continue (sur I). □

3.5 Inégalité des accroissements finis

Théorème 15.17 – Inégalité des Accroissements Finis (IAF)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. S'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathring{I}$, on a $|f'(x)| \leq K$, alors

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y| \qquad\qquad \text{(càd } f \text{ est } K\text{-lipschitzienne)}$$

Démonstration. Soit $x, y \in I$. Montrons que $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$. Si $x = y$, c'est évident. Si $x \neq y$, quitte à échanger les rôles de x et y, on peut considérer que $x < y$. Appliquons le TAF à f sur $\big[x, y\big]$: □

- f est continue sur $\big[x, y\big]$ car f l'est sur I.
- f est dérivable sur $\big]x, y\big[$ car tout point de $\big]x, y\big[$ est nécessairement un point intérieur de I (même si x ou y sont des extrémités de I).

Ainsi, il existe $c \in \left]x,y\right[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$ donc

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|f'(c)\right| \leq K$$

D'où on conclut en multipliant par $|x-y|$ qui est positif.

Remarque. L'implication de l'IAF est en fait une équivalence : si f est K-lipschitzienne (et dérivable en tout point intérieur de I), alors $|f'|$ est majorée par K.

Corollaire 15.18

Soit $f : \left[a,b\right] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors f est K-lipschitzienne avec $K = \max\limits_{x \in \left[a,b\right]} \left|f'(x)\right|$.

Démonstration. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, f' est continue sur $\left[a,b\right]$ donc par composition il en va de même pour $|f'|$. Par le théorème des bornes atteintes, la fonction $|f'|$ est donc bornée sur $\left[a,b\right]$ et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint son maximum et on peut poser

$$K := \max_{x \in \left[a,b\right]} \left|f'(x)\right|$$

Alors, par l'IAF, pour tous $x,y \in \left[a,b\right]$, on a bien $\quad |f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$. □

Exemple 11. Montrer que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$, on a $|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|$.

4 Le théorème de la limite de la dérivée

4.1 Notion de limite épointée

Avant de pouvoir aller plus loin, il faut étendre la notion de limite à un cadre légèrement plus général.

Définition 15.19 – Limite épointée

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que <u>f admet une limite épointée en a</u> si la fonction $f\big|_{D\setminus\{a\}}$ admet une limite en a. On la note

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$$

La fonction f est donc définie en a, mais la valeur de $f(a)$ n'a aucune incidence sur l'existence éventuelle et la valeur de la limite épointée en a.

Exemple 12. $f : x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor$ vérifie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = -1$.

Théorème 15.20

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite épointée en a qui vaut $f(a)$. Dans ce cas, on a :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$$

En particulier, on a même que f est continue en a.

Remarque. Ce théorème est particulièrement utile lorsque $f(x)$ a une expression différente lorsque $x \neq a$ et lorsque $x = a$.

Exemple 13. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ admet une limite en 0 si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = f(0)$, i.e. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. On peut vérifier que c'est bien le cas, donc f admet une limite en 0 et en particulier est continue en 0 puisque $0 \in D_f$.

Exemple 14. Dans l'Exemple 12, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = -1 \neq f(0)$, donc f n'a pas de limite en 0 (et est encore moins continue en 0).

Théorème 15.21

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f admet une limite épointée en a
- f admet une limite à gauche en a (si cela a un sens) et à droite en a (si cela a un sens), et ces deux limites sont égales (si elles ont toutes les deux un sens).

De plus, lorsque ces assertions sont vérifiées, toutes ces limites sont égales :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

4.2 Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction qu'on suppose dérivable sur $D \setminus \{a\}$. On souhaite savoir si f est aussi dérivable en a. On pourrait étudier la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ quand x tend vers a. Mais dans certains (rares) cas, trouver cette limite est difficile et il est plus simple d'utiliser le résultat suivant pour conclure.

Théorème 15.22 – Théorème de limite de la dérivée (TLD)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $D \setminus \{a\}$ et continue en a. Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

En particulier :

- Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
- Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, et donc f n'est pas dérivable en a.

Autrement dit, si f' admet une limite épointée (finie ou non) en a, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers la même limite en a.

Remarque. Dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$, on a en particulier $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell = f'(a)$, de sorte que f' est continue en a. Dans le second cas, on a en particulier que $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a.

Démonstration. Soit I l'intervalle de D qui contient a. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. On pose

$$J = \begin{cases} [a, x] & \text{si } x > a \\ [x, a] & \text{si } x < a \end{cases}$$

Comme I est un intervalle, on a $J \subset I$. Appliquons le TAF à f sur J. f est continue sur D donc en particulier sur J. De plus f est dérivable sur $D \setminus \{a\}$ donc est dérivable sur $]a, x[$ (resp. sur $]x, a[$) si $x > a$ (resp. si $x < a$). Ainsi, le TAF s'applique : il existe c_x strictement compris entre a et x tel que

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Or, comme c_x est strictement compris entre a et x, on a, par composition de limites :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} c_x = a \qquad \text{avec} \quad c_x \neq a \\ \lim\limits_{\substack{X \to a \\ X \neq a}} f'(X) = \ell \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(c_x) = \ell$$

Puisque $f'(c_x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x \neq a)}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

□

Pour vérifier si f est dérivable en a, on regarde le plus souvent si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Cependant, il arrive que cette limite soit compliquée à calculer pour certaines fonctions f, tandis que la limite de $f'(x)$ quand x tend vers a est plus simple. Le théorème de la limite de la dérivée s'avère alors très utile.

Méthode

Pour déterminer si f est dérivable en a avec le TLD :

1. On calcule $f'(x)$ pour x “proche de a” mais pas égal à a.
2. On regarde la limite de $f'(x)$ quand x tend vers a et on conclut par le TLD.

Exemple 15. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt{x}\right)$ est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

5 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

5.1 Définition

Par convention, on note $f^{(0)} = f$.

Définition 15.23 – Ensembles $\mathscr{D}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit (de manière récursive) qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est <u>n fois dérivable</u> si la fonction $f^{(n-1)} : D \to \mathbb{R}$ est dérivable, et la dérivée de cette fonction est alors notée $f^{(n)}$. On a ainsi

$$f^{(0)} = f \qquad f^{(1)} = f' \qquad f^{(2)} = f'' \qquad \text{etc.}$$

On note $\mathscr{D}^n(D, \mathbb{R})$, ou juste $\mathscr{D}^n(D)$, l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La valeur de $f^{(n)}(a)$ est appelée la <u>dérivée n-ième de f en a</u>.
Comme $f^{(0)} = f$, par convention, toute fonction est “0 fois dérivable”. Plus précisément cette assertion n'affirme rien et elle est considérée comme vraie (vide logique).

Définition 15.24 – Classe $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.

- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue.
- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathscr{C}^n(D,\mathbb{R})$ ou juste $\mathscr{C}^n(D)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}^\infty(D,\mathbb{R})$ ou juste $\mathscr{C}^\infty(D)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque.

- En particulier $\mathscr{C}^0(D) = \mathscr{C}(D)$ est l'ensemble des fonctions continues sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{C}^{n+1}(D) \subset \mathscr{D}^{n+1}(D) \subset \mathscr{C}^n(D)$.
  - En effet si $f \in \mathscr{C}^{n+1}(D)$, alors f est en particulier $n+1$ fois dérivable et donc $f \in \mathscr{D}^{n+1}(D)$
  - Par ailleurs, si $f \in \mathscr{D}^{n+1}(D)$, alors f est en particulier n fois dérivable, et comme $f^{(n)}$ est dérivable, elle est également continue. D'où $f \in \mathscr{C}^n(D)$.
- Plus généralement, on peut écrire :

$$\mathscr{C}^0(D) \supset \mathscr{C}^1(D) \supset \mathscr{C}^2(D) \supset \ldots \supset \mathscr{C}^\infty(D)$$
$$\mathscr{C}^\infty(D) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^n(D)$$

Exemple 16 (Important !)**.** Toute fonction polynômiale est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Toute fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (sur son ensemble de définition).

Exemple 17.

- Les fonctions exp, ln, cos, sin, tan, arctan... sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ (sur leur ensemble de définition).
- Soit $f : x \mapsto |x|$. On a $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ mais $f \notin \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ car f n'est pas dérivable en 0.
- Soit $f : x \mapsto x^{3/2}$. On a $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+)$ mais $f \notin \mathscr{D}^2(\mathbb{R}_+)$ car pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, donc f' n'est pas dérivable en 0.

5.2 Calculer une dérivée n-ième

Méthode

Pour calculer la dérivée n-ième d'une fonction f :

1. On trouve d'abord au brouillon une formule de récurrence pour $f^{(n)}$.
2. On démontre cette formule par une récurrence, en n'oubliant pas de justifier la dérivabilité de $f^{(n)}$ pour calculer $f^{(n+1)}$.

Toutefois, il n'est pas nécessaire de justifier la dérivabilité de $f^{(n)}$ si on a montré au préalable que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exemple 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Remarque. On évitera d'écrire " $f^{(\infty)}$ ", cette fonction ne serait pas bien définie (sauf cas très particuliers...).

5.3 Propriétés des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Théorème 15.25 – Combinaisons linéaires

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{C}^n(D)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^n(D)$. De plus, si $n \neq +\infty$,

$$\forall x \in D \qquad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)$$

Théorème 15.26 – Produit – Formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour toutes fonctions $g, h \in \mathscr{C}^n(D)$, on a $gh \in \mathscr{C}^n(D)$. De plus, si $n \neq +\infty$,

$$\forall x \in D \qquad (gh)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x)$$

Exemple 19. Soit $f : x \mapsto x^2 e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et calculer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le calcul ci-dessus nécessite une certaine rigueur. Comme $g^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \geq 3$, on peut être tenté d'écrire :

$$(!) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{\boxed{n}} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{\boxed{2}} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x)$$

Mais ce n'est pas exact pour $n \leq 1$. Par exemple pour $n = 1$, la somme de droite contient le terme (pour $k = 2$)

$$\underbrace{\binom{1}{2}}_{=0} g^{(2)}(x)\, \underbrace{h^{(-1)}(x)}_{(?)}$$

Théorème 15.27 – Quotient

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soit $f, g \in \mathscr{C}^n(D)$. Si g ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^n(D)$.

Théorème 15.28 – Composition

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soit $f \in \mathscr{C}^n(D, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^n(D', \mathbb{R})$, avec $f(D) \subset D'$. Alors $g \circ f \in \mathscr{C}^n(D)$.

Démonstration. Non exigible. □

Théorème 15.29 – Réciproque

Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et f une application bijective de classe $\mathscr{C}^n$ définie sur D. On suppose que la dérivée *première* f' ne s'annule pas sur D.
Alors l'application réciproque f^{-1} est une bijection de classe $\mathscr{C}^n$.

Démonstration. Non exigible. □

Exemple 20. Soit f une bijection (de D sur $f(D)$) de classe $\mathscr{C}^2$ dont la dérivée f' ne s'annule pas sur D. On a donc, pour tout $y \in f(D)$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

On remarque alors que $(f^{-1})'$ est dérivable en y par composée et quotient de fonctions dérivables, et que :

$$(f^{-1})''(y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Comme on peut le voir, pour que cette expression ait un sens, il suffit que f' ne s'annule pas (et f'' peut donc a priori s'annuler).

Exemple 21. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + \ln x$. On admet que f est bijective. Montrer que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

6 Fonctions complexes

La définition de la dérivabilité d'une fonction complexe est une adaptation naturelle de la notion pour les fonctions réelles :

Définition 15.30

Soit $f : D \to \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite *finie* en a. On note alors

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{C}$$

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a. Si f est dérivable en tout point $a \in D$, on définit alors sa (fonction) dérivée $f' : D \to \mathbb{C}$.

On peut définir de même les ensembles $\mathscr{D}^n(D, \mathbb{C})$, $\mathscr{C}^n(D, \mathbb{C})$ et $\mathscr{C}^\infty(D, \mathbb{C})$.

Théorème 15.31

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $f : D \to \mathbb{C}$.
La fonction f est dans $\mathscr{C}^n(D, \mathbb{C})$ si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont dans $\mathscr{C}^n(D, \mathbb{R})$. De plus, si $n \neq +\infty$, on a

$$f^{(n)} = (\mathrm{Re} f)^{(n)} + i\,(\mathrm{Im} f)^{(n)}$$

Ce qui ne change pas dans le cadre $f : D \to \mathbb{C}$

- Opérations sur les dérivées et les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ et/ou $\mathscr{C}^\infty$: combinaisons linéaires, produit (formule de Leibniz), quotient. Pour la composition $g \circ f$, le cadre est $f : D \to \boxed{\mathbb{R}}$ et $g : D' \to \mathbb{C}$ pour que $f(D) \subset D'$.
- Dérivées à gauche, à droite en a.

Ce qui change dans le cadre $f : D \to \mathbb{C}$

- Les notions de maximum, minimum de f n'ont pas de sens car il n'y a pas d'inégalités sur $\mathbb{C}$.
- Rolle et le TAF sont faux : par exemple si $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est définie par $f(t) = e^{it}$, alors f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, et $f(0) = f(2\pi) = 0$ mais f' ne s'annule pas sur $]0, 2\pi[$. En effet
$$\left|f'(t)\right| = \left|ie^{it}\right| = 1 \neq 0$$
- L'IAF par contre demeure vrai, les valeurs absolues sont traitées comme des modules :

Théorème 15.32 – IAF complexe

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. S'il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathring{I}$, on a $|f'(x)| \leq K$, alors

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Exemple 22. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\left|e^{ix} - e^{iy}\right| \leq |x - y|$.

En particulier, l'IAF permet de généraliser le résultat selon lequel une fonction de dérivée nulle sur un $\boxed{\text{intervalle}}$ est constante :

Théorème 15.33

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

f est constante (sur I) si et seulement si $f' = 0$ sur $\mathring{I}$

7 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point a de D, on peut :

- Utiliser les opérations usuelles sur les fonctions dérivables :
  - La somme / produit / ... de fonctions dérivables en a est dérivable en a.
  - Si $f = g \circ h$ avec h dérivable en a et g dérivable en $h(a)$, alors f est dérivable en a.
- Chercher si le taux d'accroissement admet une limite finie en a.
- Appliquer le théorème de la limite de la dérivée.

Le premier item ci-dessus permet aussi de montrer facilement que f est dérivable (voire de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur D.

Méthode

Pour calculer une dérivée n-ième, on peut :

- Calculer les premières dérivées successives, conjecturer une formule, et la montrer par récurrence.
- Si la fonction s'écrit comme un produit, utiliser la formule de Leibniz.
- Transformer l'expression pour faciliter les dérivations successives.